| L.O.CHATTI<br>Le 02 / 03 / 2010 | DEVOIRE DE SYNTHESE N° 2 | $4^{eme}$Maths<br>Durée : 4 heures |
| --- | --- | --- |

***EXERCICE 1*** ( 3 points)

Pour chacune des questions suivantes répondre par Vrai ou Faux **en justifiant la réponse.**

1) Soit $a$ un entier tel que $a \equiv 16$ (mod 17). Alors $a^{2009} + a^{2010} \equiv 0$ (mod 17).

2) $\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{e^t}\, dt = 2$.

3) L'une des directrices de l'hyperbole d'équation : $-9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la droite d'équation : $x = \frac{16}{5}$.

4) Le centre de la similitude indirecte d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{3}\,\bar{z} + \sqrt{2}$, a pour affixe : $\sqrt{2}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

***EXERCICE 2*** (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit la conique (C ) de foyer F(1 , $-1$) et de directrice la droite $D$ d'équation : x = 5 et d'excentricité $e = \frac{1}{3}$, le point A ( 0, $\frac{1}{3}$ )

1) Déterminer la nature de (C ) et vérifier que A $\epsilon$ (C )

2) Déterminer une équation cartésienne de (C ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3) Donner une équation cartésienne de la tangente ( $T$ ) à (C ) au point $A$.

4) Tracer ( $T$ ) et (C ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

***Exercice 3*** ( 4.5points)

Soit la fonction $f$ définie sur [1, +∞[ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

1) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 1.

2) Etudier les variations de $f$ et montrer que ∀ x $\epsilon$[1, $e$] on a : $0 \leq f(x) \leq 1$

3) Pour tout $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_1^e x\left(\sqrt{\ln x}\right)^n dx$.

a- Calculer $I_2$.

b- Montrer que la suite ( $I_n$ ) est décroissante.

c- Montrer que, $\forall n \geq 2$; $0 \leq I_n \leq e(e-1)$. En déduire que ( $I_n$ ) est convergente.

4) a- En utilisant une intégration par parties, montrer que, $\forall n \geq 2$ : $I_n = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{4}I_{n-2}$

b- En déduire que, pour tout $n \geq 2$; $\frac{2e^2}{n+6} \leq I_n \leq \frac{2e^2}{n+4}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ .

***Exercice 4*** ( 3 points)

1) a- Soit n un entier naturel , déterminer suivant les valeurs de n le reste modulo 3 de $2^n$ .

b- Déterminer le reste modulo 3 de $40502^{2010}$.

2) a- Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $5^{2n} \equiv 1$ (mod 3).

b-Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que, $2^n - 5^{2n} \equiv 0$ (mod 3).

3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que, $40502^n - 40525^n \equiv 0$ (mod 3).

***Exercice 5*** ( 5.5points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ,1[$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^{2x}} & si\ \ x \prec 0 \\ f(x) = -\ln(1-x) & si\ \ x \in [0,1[ \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 0

   b) Montre que f est dérivable en 0 et déterminer f ’(0)

2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé ( o , i , j )

3) Calculer l’aire de la partie du plan limité par $(C)$ ; l’axe des abscisses et les droites d’équations respectives : x = 0 et x = $-\dfrac{1}{2}$

4) Soit g la restriction de f à l’intervalle $]-\infty, 0[$

   a) Montrer que g admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle J que l’on précisera et calculer le réel $g^{-1}(-\dfrac{1}{2})$

   b) Justifier que $g^{-1}$ est dérivable sur J

   c) Montre que pour tout x de $]-\infty, 0[$ $g'(x) = 1 - [g(x)]^2$ ; en déduire que pour tout x de J on a : $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

   d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

**Barème**

EX1 : 4 x (0.75)

EX2 : 0.75 + 0.75 + 1 + 1.5

EX3 : 0.25 +0.75 + 0.5 +0.5 + 0.75 +0.75 + 1

EX4 : 0.5+0.5+0.5+0.75+0.75

EX5 : 0.5+0.5+2+0.75+0.5+0.25+0.5+0.5